LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y EL NEXO CON LA REALIDAD

Jeannette Galleguillos – Oscar Pinto
jeannette.galleguillos@gmail.cl – opinto.vargas@gmail.com
Universidade Estadual Paulista, Brasil - Universidad de Valparaíso, Chile

Tema: La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: Función Cuadrática, Resolución de Problemas, Propuesta de Problemas.

Resumen

En este trabajo se desarrolló una experiencia en un curso de estudiantes chilenas del nivel once de escolaridad, centrándose en el tema de la función cuadrática. Se trabajó en grupos de 2 o 3 alumnas en un enfoque pedagógico en tres fases. En la primera fase, a través del software Geogebra, las estudiantes descubrieron los conceptos asociados a la función cuadrática. En la segunda fase, las estudiantes resolvieron problemas, y en la tercera, las mismas estudiantes plantearon los problemas buscando un contexto real. En este artículo se analizan las características de las respuestas de las estudiantes a través de las etapas. El estudio se realizó cualitativamente y la recolección de datos se llevó a cabo a través de las respuestas que las estudiantes dejaron en papel. Los resultados indicaron que las estudiantes desarrollaron las actividades de la primera etapa, descubriendo los conceptos con la ayuda de Geogebra. En las otras etapas, se tuvieron dificultades para encontrar el nexo de la matemática con la realidad, sin embargo, en algunos se evidencia imaginación y creatividad al proponer sus propios problemas, aspecto que puede ser potenciado.

1. Introducción

Los países de la OECD se encuentran efectuando reformas curriculares en los niveles de escolaridad básica y media. Mencionan la necesidad de cambiar los procesos educativos desde un aprendizaje memorístico, poco profundo pero de amplia cobertura, y de procesos de aprendizaje individualistas, hacia procesos de aprendizaje en que los estudiantes desarrollen habilidades de nivel superior, que se enfrenten a problemas, desarrollen estudios en profundidad y trabajen colaborativamente con sus compañeros (Venezky & Davis, 2002).

Así, la resolución de problemas en matemática toma un papel importante para el desarrollo de habilidades en los estudiantes, necesarios para la vida. De la misma forma, las herramientas matemáticas computacionales presentan beneficios innegables que pueden facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. La visualización matemática con el uso de TIC pueden apoyar positivamente los procesos de aprendizaje.

En este trabajo, se realizó un estudio donde los estudiantes experimentaron tres fases de trabajo. Una etapa de descubrimiento de conceptos con el apoyo de herramienta computacional GeoGebra, una etapa de resolución de problemas, y una donde los mismos estudiantes son animados a proponer sus propios problemas. En este trabajo reportamos la experiencia en las diferentes etapas, enfocándonos en el nexo de la realidad con la matemática que presentan los estudiantes.

2. Antecedentes

En esta sección se abordan antecedentes referentes al marco de referencia de resolución de problemas y realidad, y del uso de tecnología.

2.1 Problemas y realidad

Pólya es el matemático más conocido por echar las bases en la resolución de problemas como una estrategia de aprendizaje. Según Pólya (1954), el alumno debe tener la oportunidad de enfrentarse a problemas en los que primero adivine y luego demuestre algún hecho matemático en un nivel apropiado. El alumno debe elaborar una particular visión del pensamiento matemático, discutiendo la matemática como un acto de generar sentido. Se argumenta que los alumnos desarrollan su sentido de la matemática, y por ende cómo usarla, a partir de sus propias experiencias con la matemática. De ello se desprende que la matemática en el aula debe reflejar este objetivo, de que la matemática es una actividad con sentido, que los estudiantes puedan llegar a entenderla y utilizarla de manera significativa.

La resolución de problemas no se refiere a un entrenamiento del estudiante con diferentes gamas de ejercicios, cuyo objetivo es el mero resultado numérico, sino el objetivo es desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes. Schöenfeld (1992) indica que el término resolución de problemas ha sido utilizado de diferentes formas, desde “trabajar en ejercicios memorísticos” hasta “hacer matemáticas como un profesional”. Para Schöenfeld (1992), el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas debe ser que los estudiantes se transformen en competentes solucionadores de problemas. Por una parte, el conocimiento matemático es visto como un conjunto de hechos y procedimientos relacionados con cantidades, magnitudes y formas, y las relaciones entre ellos. El hecho de saber matemática se considera como "dominar" estos hechos y procedimientos. Por otra parte, la matemática se conceptualiza como la "ciencia de los patrones", una disciplina (casi) empírica muy afín a las ciencias en su énfasis en el patrón de búsqueda sobre la base de la evidencia empírica.

Schöenfeld indica que:

> "La matemática es una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de profesionales capacitados (los científicos matemáticos) se dedica a la ciencia de los patrones - intentos sistemáticos, basados en la observación, el estudio y la experimentación, para determinar la naturaleza o principios de regularidades en los sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemática aplicada)". (Traducción nuestra).
>
> (Schöenfeld, 1992, página 3)

Así, qué sentido tiene que el desarrollo del pensamiento matemático, si no se tiene un nexo con realidad que representa la matemática? Por eso, uno de los parámetros de la resolución de problemas es que los problemas sean provenientes de la realidad. Sin embargo, el término realidad es visto por los investigadores de diferentes formas y bajo diferentes niveles de realidad. Para Nina (2005), el resolver problemas de la realidad, generalmente ligados a modelación, tiene el objetivo de aproximar "los mundos real y matemático", Anastácio (1990) habla de realidad como el "mundo-vida del alumno", y para Macintyre (2005) la realidad debe estar orientada al "campo profesional del estudiante". Para Bean (2007), la realidad no puede ser vista solo como "fuera de la matemática", sino que es posible abordar situaciones-problemas a partir de fenómenos físicos, biológicos, químicos y también matemáticos. Borba y Villarreal (2005) introdujeron un enfoque en que los propios estudiantes son los que escogen situaciones de interés, desde su realidad, para resolverlas mediante el desarrollo de proyectos de modelación.

En este trabajo, y con el objetivo de apoyar el currículo escolar, se utilizarán problemas extraídos de libros escolares. No obstante, se integrará una fase donde se pedirá a los estudiantes construir sus propios problemas, con el objetivo de estudiar el nexo de la matemática, en nuestro caso la función cuadrática, con la realidad del estudiante.

2.3 Tecnología para aprendizaje de la matemática

En Borba y Villarreal (2005) se presenta un constructo teórico denominado Seres-humanos-con-medios en el cual se discute que el conocimiento matemático es el resultado de una construcción de un colectivo pensante de seres humanos con medios tecnológicos. Estos autores puntualizan que los medios tecnológicos empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemática que es construida y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos.

El constructo teórico de estos investigadores está fundamentado epistemológicamente en los planteamientos de Lévy (1993) quien sostiene que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, y de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento. Según Lévy, las bibliotecas, las ciudades y los artefactos son parte de la manera en que conocemos.

El software de geometría dinámica GeoGebra, utilizado en actividades que incluyan exploración, discusión y comprobación de conjeturas, a través de la visualización matemática y las aplicaciones dinámicas que ofrece, es una herramienta que puede facilitar la producción de conocimiento y el interés de los estudiantes.
En este trabajo, se utilizará este software en una etapa introductoria, para que mediante actividades grupales y de exploración, los estudiantes sean introducidos para descubrir conceptos ligados a la función cuadrática.

3. Métodos y actividades

En esta sección se presentan los métodos utilizados en el estudio y las características de la actividad pedagógica desarrollada.

3.1 Métodos

El estudio se llevó a cabo a través de un enfoque cualitativo analizando las producciones en papel que dejaron los estudiantes en la resolución de una guía de trabajo. Los registros de los estudiantes, dentro de un trabajo mayor, fueron analizados con el objetivo de encontrar fortalezas y debilidades que los estudiantes presentan cuando experimentan las etapas. Sin embargo, en este trabajo, nos enfocamos en reportar el nexo de la matemática con la realidad que presentan los estudiantes.

La experiencia se llevó a cabo en un curso de nivel once de escolaridad de estudiantes de género femenino, en una escuela particular subvencionada de la ciudad de Valparaíso, Chile, a través de un taller. Las estudiantes trabajaron en grupos conformados por dos o tres miembros. La experiencia tuvo una duración de dos semanas, llevada a cabo durante el mes de diciembre de 2012, con un total de 8 horas de dedicación. El desarrollo de las actividades no fue considerado como una calificación dentro de la asignatura de matemática para las estudiantes.

3.2 Actividades desarrolladas

Las actividades desarrolladas se componen de tres fases principales, las que se muestran en la Figura 1. La primera fase de la actividad va guiando a las estudiantes en un aprendizaje por descubrimiento con el apoyo de la herramienta computacional GeoGebra. Las estudiantes, con la ayuda del software y en interacción grupal descubren los conceptos asociados a la ecuación cuadrática y desarrollan la actividad dejando sus respuestas en papel.

Figura 1. Estructura de las actividades

La fase 2 se compone de un conjunto de problemas a desarrollar, y en la fase 3, se pide a las estudiantes que propongan un problema relacionado con la función cuadrática.

4. Resultados

En esta sección se presentan los resultados a partir de los registros de las estudiantes en papel. Se analiza cada fase por separado, cada una en una sub-sección.

4.1 Fase 1

Las primeras actividades tuvieron el objetivo de que las estudiantes, a través del software GeoGebra, analizaran la influencia de los parámetros *a*, *b* y *c* de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Notamos que las estudiantes utilizaron el término parábola, y también en algunas actividades se habló de ecuación cuadrática. Esta fase es bastante amplia y sólo se ejemplifica con algunas actividades y resultados.

Las respuestas de las estudiantes a algunas preguntas, visualizadas en la Figura 2 (figuras en el Anexo A, a partir de la Figura 2), indican el reconocimiento de parábolas “cóncavas hacia arriba” y en “cóncavas hacia abajo” (lenguaje utilizado por las alumnas y que denota sus conocimientos previos). Por otro lado se observa el desarrollo de cálculos del discriminante de la ecuación cuadrática y observaciones de intersecciones con los ejes.

Frente a la solicitud de escribir una función cuadrática con determinadas características, por ejemplo, "que corte el eje *x* y que se abra hacia abajo", utilizan el discriminante para comprobar su respuesta. Esto es un indicador de comprensión del concepto de discriminante.

Con la ayuda de la visualización proporcionada por el software GeoGebra se logró más incentivo en realizar las actividades, provocando que las alumnas resolvieran las actividades respondiendo en forma precisa y correcta.

4.2 Fase 2

La fase dos se compone de seis problemas, pero por motivos de espacio, solo mostraremos algunos de ellos como ejemplos. En el primero, se pregunta por la altura que alcanza una pelota de voleibol '*x*' segundos después del saque; se ejemplifica mostrando la gráfica en el contexto del problema (ver la Figura 4). Al entregar la gráfica del problema se permite una visualización de la situación que favorece el desarrollo de las respuestas de las estudiantes.

El siguiente problema, ver Figura 5, se focaliza en el lanzamiento de una pelota de fútbol. A diferencia del anterior, no se entrega la gráfica; se pide a las estudiantes representarla. Con respecto al nexo con la realidad, se observa una mala interpretación entre la gráfica y el contexto real. Por ejemplo, si una pelota es pateada y lanzada al aire, nuestro sentido común debe decirnos que la gráfica debe ser la de una función cuadrática abierta hacia abajo, sin embargo la estudiante la dibuja abierta hacia arriba.

La Figura 6 muestra un problema en que se entrega una función que representa el movimiento de un delfín que salta fuera del agua. En el desarrollo del problema se evidencia la anticipación a la respuesta, dando un bosquejo de la situación, sin encontrar los parámetros de la función para determinarla. Nótese que se grafica t segundos para t negativo, sin comprender el significado de esto; y además se identifican los ejes coordenados siempre como x e y, cuando los parámetros entregados fueron t y h. No existe entonces relación entre la función $h(t)$ y los ejes coordenados x e y.

4.3 Fase 3

En la fase tres, se pide a las estudiantes proponer una situación problema que se pueda representar mediante una función cuadrática y construir su gráfica. La Figura 7 muestra un problema propuesto por una estudiante, referido a la forma de un foco de luz, sin embargo, por los datos matemáticos entregados (solo puntos sin sentido), no existe nexo entre lo real y lo matemático.

En la Figura 8, se propone un problema referente a la ruta que sigue un avión en el aire. Se dibuja la ruta del avión que efectivamente representaría una función cuadrática, intentando insertar los ejes coordenados. En esta situación, si bien existe un acercamiento mediante la forma del dibujo, la ruta dibujada recorre el eje x tanto para el lado positivo como para el negativo, sin comprenderse qué representa x. Así, existe una conexión parcial entre lo planteado por la estudiante y la matemática.

En la Figura 9 se muestra un problema diseñado, en que se pide comprobar si la ruta que sigue una rampa de *skate* es la función x^2+6x. En caso de no corresponder, se pide que se plantee otra función que modele la situación. Este es un problema con sentido práctico y que puede representarse por una función cuadrática, ciertamente no la misma entregada por la estudiante, quien deja abierta la posibilidad de buscar una función que modele una rampa de *skate*.

Al observar las situaciones podemos percatarnos de que las alumnas comprenden la forma que sigue una función cuadrática dada, hecho mostrado en lo realizado a través de las fases. Sin embargo, no logran representar matemáticamente las situaciones que plantean, especialmente por no comprender qué representan los ejes coordenados desde la óptica de la situación planteada. Por lo tanto, se deduce, que las alumnas poseen ambos componentes, conceptos matemáticos y realidad, pero no logran relacionarlos; y ya en el ambiente realidad, parecen 'olvidar' la matemática aprendida. Por otro lado, las estudiantes mostraron creatividad en el planteamiento de los problemas, trabajando con elementos de su propio interés, aspecto que se recomienda fomentar.

5. Conclusiones

Las estudiantes desarrollaron las actividades de la primera etapa sin dificultades, descubriendo los conceptos matemáticos con la ayuda de GeoGebra. Una vez vivida esta etapa, se enfrentaron a problemas, y a pesar de evidenciar un buen manejo en los conceptos aprendidos, mostraron dificultades para encontrar el nexo entre la matemática y la realidad, ya desde la segunda fase. Más precisamente, parecen no comprender qué representan los ejes coordenados desde la óptica de la situación planteada. Sin embargo, algunas alumnas mostraron imaginación y creatividad al proponer sus propios problemas, aspecto que puede ser potenciado.

Finalmente, a través de esta experiencia, podemos inferir la gran importancia de que los estudiantes planteen sus propias situaciones desde una fase inicial de aprendizaje, para fortalecer el nexo entre la realidad y la matemática.

6. Referencias bibliográficas

Anastácio, M. Q. (1990). *Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Bean, D. (2007). Modelagem Matemática: uma mudança de base conceitual. CNMEM, Ouro Preto.

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Comunications Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. Springer.

Lévy, P. (1993) *Las tecnologías de la inteligencia. El futuro del pensamiento en la era informática*. La Découverte, Paris.

Macintyre, A. (2002). *Tecnologia e Prazer – o ensino da matemática aplicada a administração.* Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Universidade de Santa Catarina, Florianópolis.

Nina, C. (2005). *Modelagem matemática e novas tecnologias: uma alternativa para a mudança de conceições em Matemática.* Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

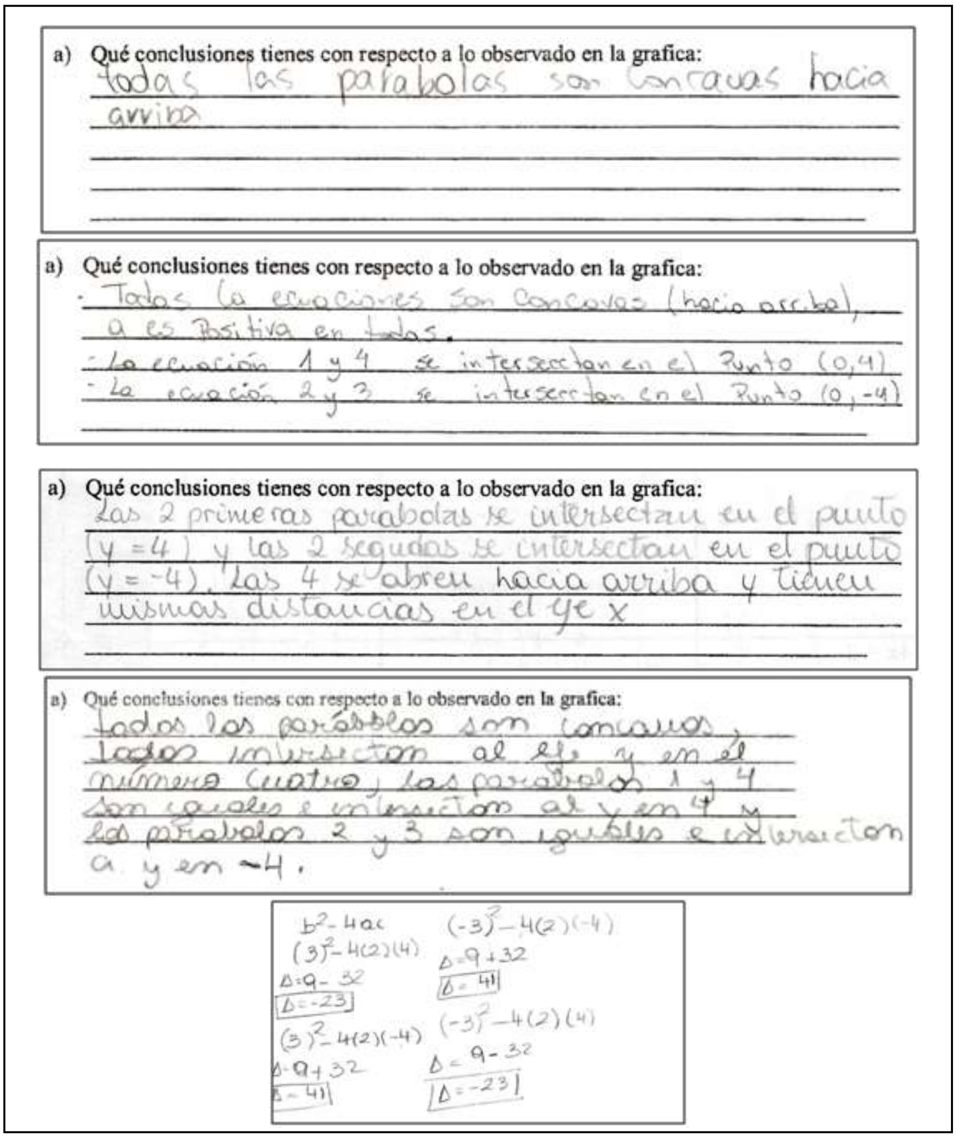
Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Schöenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. University of California.

Venezky, R., & Davis, C. (2002). Quo Vademus? The Transformation of Schooling in a Networked World. *OECD/CERI* .

Anexo A

Este anexo muestra las figuras desde la 2 hasta la 9.



a) Qué conclusiones tienes con respecto a lo observado en la grafica:
todas las parabolas son concavas hacia arriba

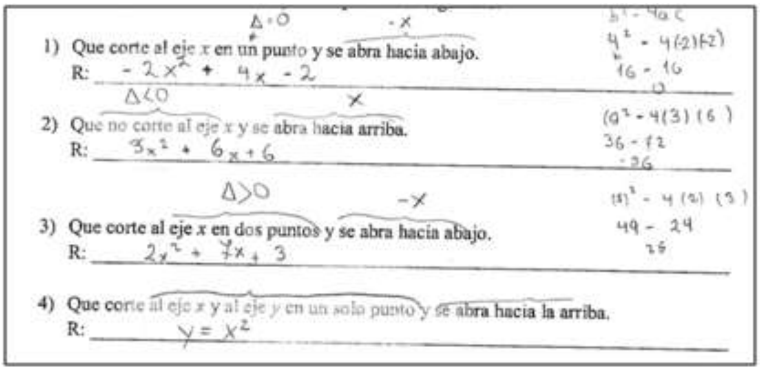
a) Qué conclusiones tienes con respecto a lo observado en la grafica:
- Todas la ecuaciones son Concavas (hacia arriba), a es Positiva en todas.
- La ecuación 1 y 4 se intersectan en el Punto (0,4)
- La ecuación 2 y 3 se intersectan en el Punto (0,-4)

a) Qué conclusiones tienes con respecto a lo observado en la grafica:
Las 2 primeras parabolas se intersectan en el punto (y = 4) y las 2 segudas se intersectan en el punto (y = -4). Las 4 se abren hacia arriba y tienen mismas distancias en el ye x

a) Qué conclusiones tienes con respecto a lo observado en la grafica:
todos los parabolas son concavas, todos intersecton al eje y en el número cuatro, las parabolas 1 y 4 son iguales e intersecton al y en 4 y las parabolas 2 y 3 son iguales e intersecton a y en -4.

b^2-4ac $(3)^2-4(2)(4)$ $\Delta=9-32$ $\boxed{\Delta=-23}$
$(3)^2-4(2)(-4)$ $\Delta=9+32$ $\boxed{\Delta=41}$
$(-3)^2-4(2)(-4)$ $\Delta=9+32$ $\boxed{\Delta=41}$
$(-3)^2-4(2)(4)$ $\Delta=9-32$ $\boxed{\Delta=-23}$

Figura 2. Algunas respuestas tras la exploración con el software



1) Que corte al eje x en un punto y se abra hacia abajo. ($\Delta=0$, $-x$)
R: $-2x^2+4x-2$ — b^2-4ac; $4^2-4(-2)(-2)$; $16-16$; 0

2) Que no corte al eje x y se abra hacia arriba. ($\Delta<0$, x)
R: $3x^2+6x+6$ — $(6)^2-4(3)(6)$; $36-72$; -36

3) Que corte al eje x en dos puntos y se abra hacia abajo. ($\Delta>0$, $-x$)
R: $2x^2+7x+3$ — $(7)^2-4(2)(3)$; $49-24$; 25

4) Que corte al eje x y al eje y en un solo punto y se abra hacia la arriba.
R: $y=x^2$

Figura 3. Uso del discriminante para determinar la función

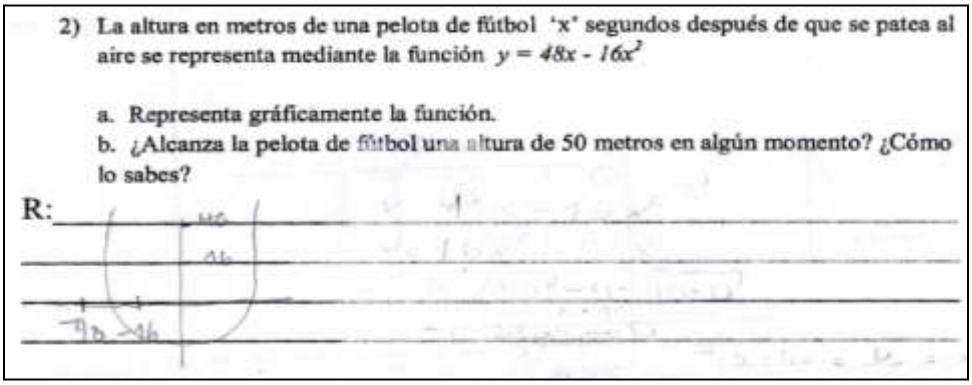
Ejercicio 7: Responder a las siguientes preguntas de planteo.

1) En la gráfica N°1 se muestra la altura aproximada, en metros, de una pelota de voleibol, 'x' segundos después del saque.

Grafica N°1

a. Estima el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima.
b. Estima la altura máxima que alcanza la pelota.

Figura 4. Problema de la pelota de voleibol.

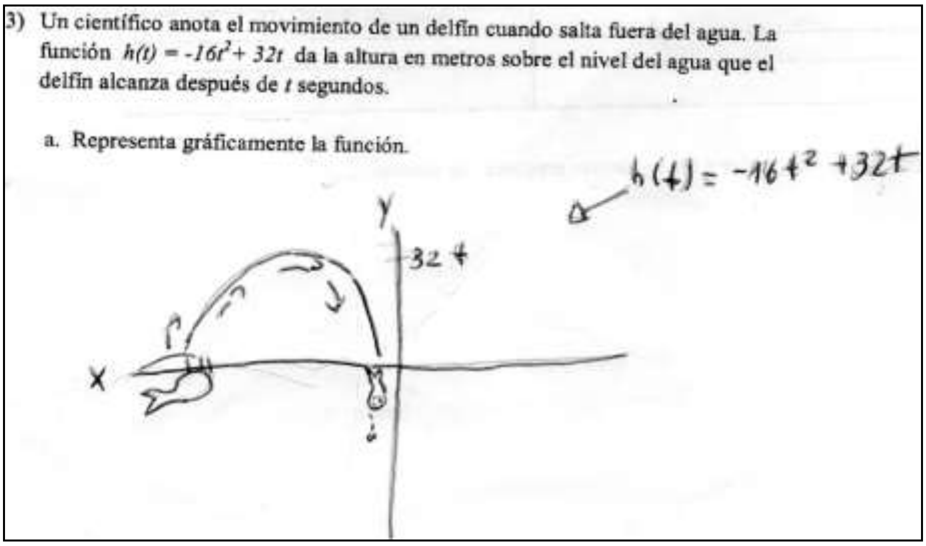


2) La altura en metros de una pelota de fútbol 'x' segundos después de que se patea al aire se representa mediante la función $y = 48x - 16x^2$

a. Representa gráficamente la función.
b. ¿Alcanza la pelota de fútbol una altura de 50 metros en algún momento? ¿Cómo lo sabes?

R:

Figura 5. Problema de la pelota de fútbol



3) Un científico anota el movimiento de un delfín cuando salta fuera del agua. La función $h(t) = -16t^2 + 32t$ da la altura en metros sobre el nivel del agua que el delfín alcanza después de t segundos.

a. Representa gráficamente la función.

Figura 6. Problema del delfín

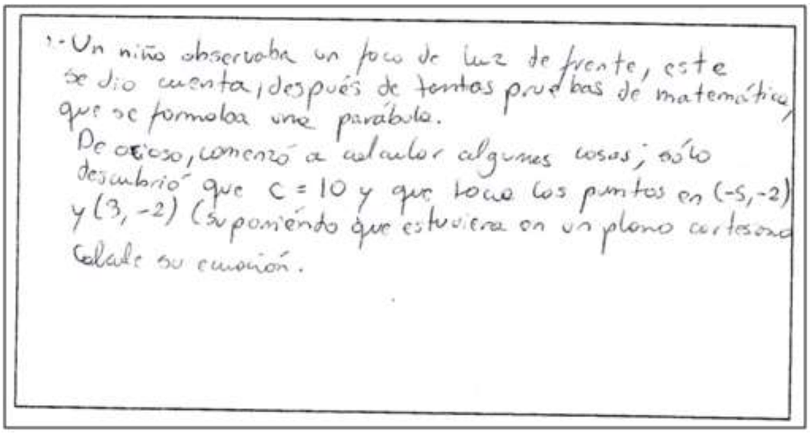

1.- Un niño observaba un foco de luz de frente, este se dio cuenta, después de tantas pruebas de matemática, que se formaba una parábola.
De ocioso, comenzó a calcular algunas cosas; sólo descubrió que $c = 10$ y que toca los puntos en $(-5,-2)$ y $(3,-2)$ (suponiendo que estuviera en un plano cartesiano)
Calcule su ecuación.

Figura 7. Respuesta sin nexo entre lo real y lo matemático

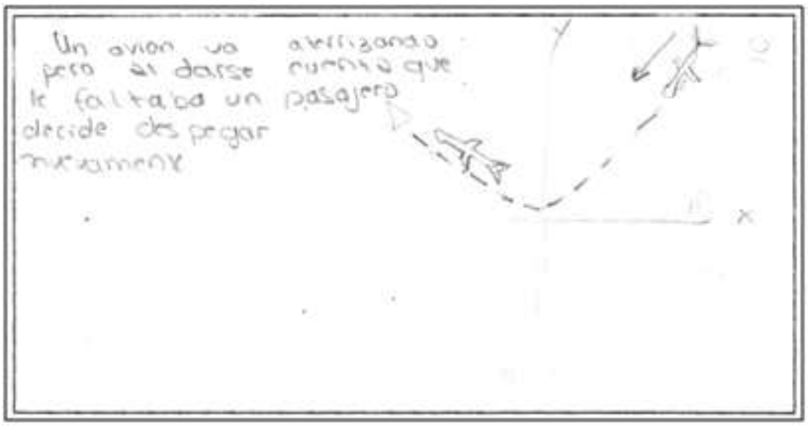


Figura 8. Respuesta creativa pero sin sentido matemático

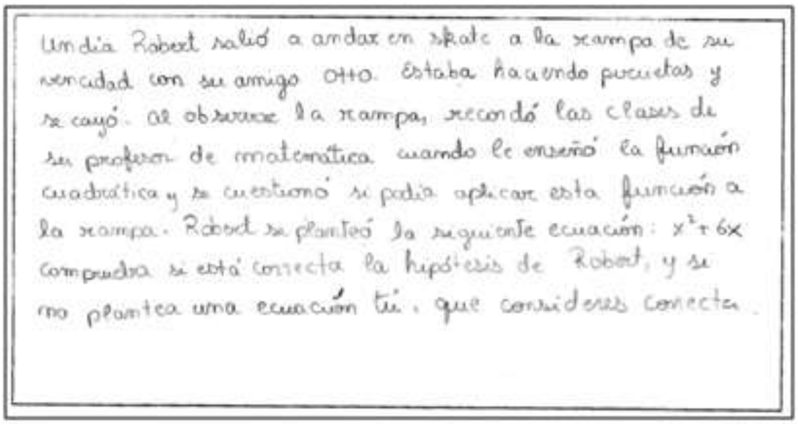

Un día Robert salió a andar en skate a la rampa de su vencidad con su amigo Otto. Estaba haciendo piruetas y se cayó. Al observar la rampa, recordó las clases de su profesor de matemática cuando le enseñó la función cuadrática y se cuestionó si podía aplicar esta función a la rampa. Robert se planteó la siguiente ecuación: $x^2 + 6x$
Comprueba si está correcta la hipótesis de Robert, y si no plantea una ecuación tú, que consideres correcta.

Figura 9. Respuesta con sentido a la que puede representar una función cuadrática.